Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Enero-Abril 2009

Nombre: ____________________

Carnet: ____________________ Sección: ________

MA-3111—Primer Parcial, modelo 28-2-2009, 35 %— 9:30 a.m.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

TABLA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE; $a \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

$u(x)$	$U(z)$
$\alpha u(x) + \beta v(x)$	$\alpha U(z) + \beta V(z)$
$u'_{gen}(x)$	$zU(z)$
$u^{(k)}_{gen}(x)$	$z^k U(z)$
$xu(x)$	$-U'(z)$
$u(x-a)$	$U(z)e^{-az}$
$e^{\alpha x}u(x)$	$U(z-\alpha)$
$u * v(x)$	$U(z)V(z)$

$\longrightarrow$

$u(x)$	$U(z)$
$\delta(x)$	1
$\delta^{(k)}(x)$	z^k
$\delta^{(k)}(x-a)$	$z^k e^{-az}$
$H(x)$	$\frac{1}{z}$
$H(x)e^{\alpha x}$	$\frac{1}{z-\alpha}$
$H(x)\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$	$\frac{1}{z^k}$

$\longrightarrow$

$u(x)$	$U(z)$
$H(x)e^{\alpha x}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$	$\frac{1}{(z-\alpha)^k}$
$H(x)\operatorname{sen}(ax)$	$\frac{a}{z^2+a^2}$
$H(x)\cos(ax)$	$\frac{z}{z^2+a^2}$
$H(x)\operatorname{senh}(ax)$	$\frac{a}{z^2-a^2}$
$H(x)\cosh(ax)$	$\frac{z}{z^2-a^2}$

---

1. La función de Bessel $J_0(t) \in C^\infty(\mathbb{R}) + tJ_0(t) = 0$ satisface la cota $|J_0(t)| \leq 1$, para todo t, y la ecuación diferencial

$$tJ_0''(t) + J_0'(t) + tJ_0(t) = 0 \tag{1}$$
$$J_0(0) = 1, \quad J_0'(0) = 0 \tag{2}$$

Sea $u(t) = H(t)J_0(t)$.
a) Encuentre la transformada de Laplace de $u(t)$
b) Use el teorema que relaciona la transformada de Laplace con la convolución para calcular

$$\int_0^t J_0(s)J_0(t-s) \tag{3}$$

Solución

2. Calcule, por el método de los residuos, la transformada de Laplace inversa de

$$U(z) = \frac{1 - z^2}{z^2(1 + 2z + z^2)}$$

Solución

MA-3111- 9:30 a.m.

3. Sea $G(x) = H(x)\sin(x) * H(x)\sinh(2x)$. Halle un operador diferencial lineal L con coeficientes constantes tal que $G(x)$ sea una función de Green para L, i.e. $LG = \delta$

   Solución

MA-3111- 9:30 a.m.

4. Sea la función 2π-periódica, dada en $(-\pi, \pi)$ por $f(x) = \cos(\alpha x)$ con $\alpha \in (0,1)$

   a) Grafique la función en $(0, 2\pi)$ para $\alpha = 0{,}5$

   b) Calcule los coeficientes a_n de la serie de Fourier $f(x) \sim a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$

   $$a_n =$$

   c) Estudiando la convergencia de la serie en $x = \pi/2$ halle la suma de la serie

   $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha^2 - (2k+1)^2} =$$

   d) Aplicando el teorema de Parseval calcule la suma

   $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha^2 - n^2)^2} =$$

   Solución